

STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1961-007

Voordracht in de serie
"Elementaire onderwerpen vanuit hoger standpunt belicht"

Dr. P.J. van Albada

24 mei 1961

Drie vraagstukken over ribben-zestallen van viervlakken



1961

Voordracht in de serie
 "Elementaire onderwerpen vanuit hoger standpunt belicht"
 door
Dr. P.J. van Albada

24 mei 1961

Drie vraagstukken over ribben-zestallen van viervlakken

Vraagstuk 1. (afkomstig van H. Steinhaus):

Er bestaan zodanige getallen $a > b > c > d > e > f$ dat er 30 verschillende viervlakken zijn met ribben a, b, c, d, e, f .

Welke andere waarde behalve 0 en 30 kan $N(a, b, c, d, e, f)$ hebben, als $N(a, b, c, d, e, f)$ het aantal verschillende viervlakken met ribben a, b, c, d, e, f voorstelt.

We zullen straks bewijzen dat N alle gehele waarden tussen 0 en 30 ook aan kan nemen. Voor we aan het bewijs beginnen zullen we eerst na moeten gaan hoe we bij een gegeven geordend zestal kunnen vaststellen of het een viervlak representeert of niet.

Een geordend zestal $(x_1, x_2; y_1, y_2; z_1, z_2)$ definieert het viervlak waarbij x_1 en x_2 overstaande ribben zijn, evenzo y_1 en y_2 , z_1 en z_2 , en waarbij de zijvlakken gevormd worden door de drietallen (x_i, y_j, z_k) met $i + j + k \equiv 0 \pmod{2}$, aangenomen dat zo'n viervlak bestaat.

Nodig voor dat bestaan is allereerst dat de driehoeken (x_i, y_j, z_k) met $i + j + k \equiv 0 \pmod{2}$ bestaan. Voldoende is dat niet: Tegenvoorbeeld (L.M. Blumenthal): ieder drietal van de 6 getallen 97, 98, 99, 100, 193 en 194 vormt een driehoek; toch bestaat er geen enkel viervlak met deze 6 ribben.

Zijn $P_i(x_i, y_i, z_i)$, $i=1,2,3,4$ vierpunten, V het volume van het viervlak $P_1P_2P_3P_4$, dan is

$$-36 V^2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x_1 y_1 z_1 \\ 0 & 1 & x_2 y_2 z_2 \\ 0 & 1 & x_3 y_3 z_3 \\ 0 & 1 & x_4 y_4 z_4 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_1 x_2 x_3 x_4 \\ 0 & y_1 y_2 y_3 y_4 \\ 0 & z_1 z_2 z_3 z_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & (r_1, r_1) & (r_1, r_2) & (r_1, r_3) & (r_1, r_4) \\ 1 & (r_1, r_2) & (r_2, r_2) & (r_2, r_3) & (r_2, r_4) \\ 1 & (r_1, r_3) & (r_2, r_3) & (r_3, r_3) & (r_3, r_4) \\ 1 & (r_1, r_4) & (r_2, r_4) & (r_3, r_4) & (r_4, r_4) \end{vmatrix}$$

zodat

$$288 v^2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2(r_1, r_1) & -2(r_1, r_2) & -2(r_1, r_3) & -2(r_1, r_4) \\ 1 & -2(r_1, r_2) & -2(r_2, r_2) & -2(r_2, r_3) & -2(r_2, r_4) \\ 1 & -2(r_1, r_3) & -2(r_2, r_3) & -2(r_3, r_3) & -2(r_3, r_4) \\ 1 & -2(r_1, r_4) & -2(r_2, r_4) & -2(r_3, r_4) & -2(r_4, r_4) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & P_1 P_2^2 & P_1 P_3^2 & P_1 P_4^2 \\ 1 & P_1 P_2^2 & 0 & P_2 P_3^2 & P_2 P_4^2 \\ 1 & P_1 P_3^2 & P_2 P_3^2 & 0 & P_3 P_4^2 \\ 1 & P_1 P_4^2 & P_2 P_4^2 & P_3 P_4^2 & 0 \end{vmatrix}$$

Wil dus een geordend zestal $(x_1, x_2; y_1, y_2; z_1, z_2)$ een viervlak voorstellen dan moet de determinant

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & x_1^2 & y_1^2 & z_1^2 \\ 1 & x_1^2 & 0 & z_2^2 & y_2^2 \\ 1 & y_1^2 & z_2^2 & 0 & x_2^2 \\ 1 & z_1^2 & y_2^2 & x_2^2 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{positief zijn.}$$

Deze voorwaarde is op zichzelf ook niet voldoende, een tegenvoorbeeld is

$$(1, 3; 5, 3; 1, 7).$$

De bijbehorende determinant is positief; geen van de drietallen $(3, 3, 7)$, $(3, 5, 1)$, $(1, 3, 1)$, $(1, 5, 7)$ vormt echter een driehoek.

Bestaat echter een van de driehoeken, bv. (x_2, y_2, z_2) en is D positief, dan bestaat het viervlak. We laten het bewijs van deze bewering hier achterwege. We gaan nu bewijzen dat $N(a, b, c, d, e, f)$ iedere gehele niet negatieve waarde kleiner dan 31 kan hebben. We stellen $a = (t + 5)^{\frac{1}{2}}$, $b = (t + 4)^{\frac{1}{2}}$, $c = (t + 3)^{\frac{1}{2}}$, $d = (t + 2)^{\frac{1}{2}}$, $e = (t + 1)^{\frac{1}{2}}$, $f = t^{\frac{1}{2}}$.

D wordt nu een polynoom van de 3e graad in t. Elk van deze polynomen is negatief voor $t = 0$. Voor zeer grote waarden van t zijn de ribben nagenoeg gelijk, zodat zeker alle 30 polynomen positief worden.

$N(a, b, c, d, e, f)$ wordt nu een functie $N(t)$ van t alleen; $N(0) = 0$, $N(+\infty) = 30$. Laten we t aangroeien van 0 tot $+\infty$ dan gaat elk van de 30 D's op een gegeven ogenblik van negatief in positief over;

iedere keer als dat gebeurt neemt N met 1 toe. We moeten dus bewijzen dat de polynomen een voor een van teken omkeren, m.a.w. dat er geen twee polynomen een positieve wortel gemeen hebben.

Substitueren we in D $x_1^2 = t + \alpha$, $x_2^2 = t + \beta$, $y_1^2 = t + \gamma$, $y_2^2 = t + \delta$, $z_1^2 = t + \epsilon$, $z_2^2 = t + \zeta$, waarbij $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta)$ een of andere permutatie van de getallen $0, 1, 2, 3, 4, 5$ is, dan komt er

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & t+\alpha & t+\gamma & t+\epsilon \\ 1 & t+\alpha & 0 & t+\delta & t+\zeta \\ 1 & t+\gamma & t+\delta & 0 & t+\beta \\ 1 & t+\epsilon & t+\zeta & t+\beta & 0 \end{vmatrix} = 4t^3 + 2t^2(\alpha + \beta + \gamma + \delta + \epsilon + \zeta) + At + B =$$

$$= 4t^3 + 30t^2 + At + B. \quad (A \text{ en } B \text{ geheel}).$$

Twee van deze polynomen hebben als verschil een lineaire vorm in t , met gehele coëfficiënten. Willen twee polynomen dus een wortel gemeen hebben, dan moet deze rationaal zijn.

We gaan de viervlakken nu nummeren. Zij V een of ander viervlak met ribben a, b, c, d, e, f . Als x_1 kiezen we de langste, dus a . Daarmee ligt x_2 vast. Als y_1 kiezen we weer de langste die nog over is. Daarmee liggen alle andere ribben vast. We hoeven op die manier alleen de ribben x_2, y_2, z_2 aan te geven: $x_1 = a$; is $x_2 = b$, dan is $y_1 = c$, is $x_2 \neq b$, dan $y_1 = b$; 5 ribben liggen dus al vast, en daarmee de zesde ook. We nummeren nu de viervlakken (x_2, y_2, z_2) in alfabetische volgorde: $V_1 = (b, d, e), \dots, V_{30} = (f, e, d)$.

Hieronder volgt een tabel van de polynomen $U(t) = \frac{1}{2}D(t) - 2t^3 - 15t^2$ en van de waarden van $D(t)$ voor $t = \frac{1}{2}$, $t = 1$, $t = \frac{3}{2}$, $t = 2$.

Uit deze tabel zien we:

- 1) Alle coëfficiënten van de tweetermen $U(t)$ zijn geheel.
- 2) Voor $t = 0$ zijn alle D 's negatief.
- 3) $D(2)$ is steeds positief. Alle polynomen hebben dus een wortel tussen 0 en 2.
- 4) Daar alle op te lossen vergelijkingen van de vorm $2t^3 + 15t^2 + \alpha t - \beta = 0$ zijn $(\alpha, \beta \text{ geheel})$ kunnen rationale wortels alleen maar getallen $\frac{n}{2}$ zijn, n geheel. Samenvallende wortels tussen 0 en 2 kunnen dus alleen optreden voor $t = \frac{1}{2}$, $t = 1$, $t = \frac{3}{2}$.
- 5) Geen der polynomen wordt nul voor $t = \frac{1}{2}$, $t = 1$ of $t = \frac{3}{2}$. Hun positieve wortels zijn dus allemaal verschillend.

Hiermee is bewezen dat $N(a, b, c, d, e, f)$ alle gehele waarden van 0 tot en met 30 kan aannemen.

TABEL I

Volgorde waarin de polynomen door 0 gaan	i	$x_2 y_2 z_2$	U	$D(\frac{1}{2})$	D(1)	$D(\frac{3}{2})$	D(2)	wortel
26	1	b d e	4t-53	- 94	- 64	-13	62	1,6001
25	2	b d f	4t-52	- 92	- 62	-11	64	1,5852
28	3	b e d	7t-77	-139	-106	-52	26	1,8506
27	4	b e f	7t-73	-131	- 98	-44	34	1,8017
30	5	b f d	8t-84	-152	-118	-63	16	1,9107
29	6	b f e	8t-81	-146	-112	-57	22	1,8760
16	7	c d e	7t-17	- 19	14	68	146	0,8220
11	8	c d f	7t-13	- 11	22	76	154	0,7021
23	9	c e d	11t-41	- 63	- 26	32	114	1,2484
19	10	c e f	11t-29	- 39	- 2	56	138	1,0211
24	11	c f d	13t-49	- 77	- 38	22	106	1,3374
22	12	c f e	13t-41	- 61	- 22	38	122	1,2060
6	13	d c e	8t- 4	8	42	97	176	0,3111
1	14	d c f	8t- 1	14	48	103	182	0,1043
21	15	d e c	16t-36	- 48	- 6	57	144	1,0564
7	16	d e f	16t- 9	6	48	111	198	0,4025
20	17	d f c	17t-37	- 49	- 6	58	146	1,0554
8	18	d f e	17t-13	- 1	42	106	194	0,5148
14	19	e c d	13t-19	- 17	22	82	166	0,7492
9	20	e c f	13t-11	- 1	38	98	182	0,5168
18	21	e d c	17t-27	- 29	14	78	166	0,8603
2	22	e d f	17t- 3	19	62	126	214	0,1549
13	23	e f c	19t-23	- 19	26	92	182	0,7381
5	24	e f d	19t- 7	13	58	124	214	0,2964
17	25	f c d	16t-25	- 26	16	79	166	0,8354
12	26	f c e	16t-20	- 16	26	89	176	0,7190
15	27	f d c	19t-25	- 23	22	88	178	0,7823
4	28	f d e	19t- 5	17	62	128	218	0,2228
10	29	f e c	20t-20	- 12	34	101	192	0,6527
3	30	f e d	20t- 5	18	64	131	222	0,2145

Vraagstuk 2. Is het mogelijk een dusdanig zestal aan te geven, dat de alfabetische volgorde ook de volgorde van de volumina is, opklim-mend van klein naar groot?

Vergelijken we in voorgaande tabel U_{2n-1} en U_{2n} , dan zien we dat de coëfficiënt van t steeds dezelfde is, en dat $U_{2n} > U_{2n-1}$. Dit is niet toevallig. V_{2n-1} en V_{2n} gaan in elkaar over door verrui-ling van de overstaande ribben z_1 en z_2 . Werken we de determinant $D(x_1, x_2; y_1, y_2; z_1, z_2)$ uit, dan komt er

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}D &= (x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2 + z_1^2 + z_2^2)(x_1^2 x_2^2 + y_1^2 y_2^2 + z_1^2 z_2^2) \\ &\quad - 2x_1^2 x_2^2 (x_1^2 + x_2^2) - 2y_1^2 y_2^2 (y_1^2 + y_2^2) - 2z_1^2 z_2^2 (z_1^2 + z_2^2) \\ &\quad - x_2^2 y_2^2 z_2^2 - x_1^2 y_1^2 z_2^2 - x_2^2 y_1^2 z_1^2 - x_1^2 y_2^2 z_1^2. \end{aligned}$$

Schrijven we $V(x_1, x_2; y_1, y_2; z_1, z_2) = \frac{1}{2}D$, dan wordt dus

$$\begin{aligned} V(x_1, x_2; y_1, y_2; z_1, z_2) - V(x_2, x_1; y_2, y_1; z_2, z_1) &= \\ = -x_2^2 y_2^2 z_2^2 - x_1^2 y_1^2 z_2^2 - x_2^2 y_1^2 z_1^2 - x_1^2 y_2^2 z_1^2 + x_1^2 y_1^2 z_1^2 + x_2^2 y_2^2 z_1^2 + \\ + x_1^2 y_2^2 z_2^2 + x_2^2 y_1^2 z_2^2 &= (x_1^2 - x_2^2)(y_1^2 - y_2^2)(z_1^2 - z_2^2). \end{aligned}$$

Nemen we nu V_{2n} voor $V(x_1, x_2; y_1, y_2; z_1, z_2)$, dan is $x_1 = a$, dus $x_1^2 - x_2^2 > 0$; evenzo is $y_1 > y_2$. De alfabetische volgorde brengt nu mee dat z_2 verder in het alfabet staat dan z_1 (d.i. de z_2 van V_{2n-1}), dus ook $z_1 < z_2$.

Nemen we $x_i^2 = t + \xi_i$, $y_i^2 = t + \eta_i$, $z_i^2 = t + \zeta_i$, $i = 1, 2$, dan is $V_{2n} - V_{2n-1} = (\xi_1 - \xi_2)(\eta_1 - \eta_2)(\zeta_1 - \zeta_2)$, onafhankelijk van t .

Voor voldoende grote waarden van t vallen $V_1, \dots, V_{30}$ dus uiteen in 15 pakketten van 2; deze paren zijn opeenvolgend genummerd; de volg-orde van de pakketten wordt bepaald door de coëfficiënten van t^1 .

Stellen we $\xi_1 + \xi_2 = \xi$, $\eta_1 + \eta_2 = \eta$, $\zeta_1 + \zeta_2 = \zeta$, $\xi_1 \xi_2 = \xi'$, $\eta_1 \eta_2 = \eta'$, $\zeta_1 \zeta_2 = \zeta'$, $\xi + \eta + \zeta = \lambda$, $\xi' + \eta' + \zeta' = \mu$, dan is:

$$\begin{aligned}
 V(x_1, x_2; y_1, y_2; z_1, z_2) &= (6t + \lambda)(3t^2 + \lambda t + \mu) - 2(2t + \xi)(t^2 + \xi t + \xi') \\
 &- 2(t^2 + \eta t + \eta')(2t + \eta) - 2(t^2 + \zeta t + \zeta')(2t + \zeta) - 4t^3 - 2\lambda t^2 \\
 &- t(\xi_2 \eta_2 + \xi_2 \zeta_2 + \eta_2 \zeta_2 + \xi_1 \eta_1 + \xi_1 \zeta_1 + \eta_1 \zeta_1 + \xi_2 \eta_1 + \xi_2 \zeta_1 + \eta_1 \zeta_1 + \xi_1 \eta_2 + \\
 &+ \xi_1 \zeta_1 + \eta_2 \zeta_1 - \xi_2 \eta_2 \zeta_2 - \xi_1 \eta_1 \zeta_2 - \xi_2 \eta_1 \zeta_1 - \xi_1 \eta \zeta_1) = 2t^3 + \lambda t^2 \\
 &+ t \left\{ \frac{\lambda^2}{2} - \frac{3}{2} (\xi_1^2 + \xi_2^2 + \eta_1^2 + \eta_2^2 + \zeta_1^2 + \zeta_2^2) - \mu \right\} + V(\xi_1^{\frac{1}{2}}, \xi_2^{\frac{1}{2}}; \eta_1^{\frac{1}{2}}, \eta_2^{\frac{1}{2}}; \zeta_1^{\frac{1}{2}}, \zeta_2^{\frac{1}{2}}).
 \end{aligned}$$

Nemen we nu $a^2 = t + \alpha$, $b^2 = t + \beta$, $c^2 = t + \gamma$, $d^2 = t + \delta$, $e^2 = t + \varepsilon$, $f^2 = t$;

$\alpha > \beta > \gamma > \delta > \varepsilon > 0$. Substitutie van a, b, c, d, e, f voor $x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2$ in een of andere volgorde in $V(x_1, x_2; y_1, y_2; z_1, z_2)$ geeft een polynoom

in t waarvan het stuk $2t^3 + \lambda t^2 + t \left\{ \frac{\lambda^2}{2} - \frac{3}{2} (\xi_1^2 + \xi_2^2 + \eta_1^2 + \eta_2^2 + \zeta_1^2 + \zeta_2^2) \right\}$ niet van

de keuze van de permutatie van a, b, c, d, e, f afhangt. Van twee polynomen zal dus datgene de grootste coëfficiënt van t hebben, waarvoor $\mu = \xi_1 \xi_2 + \eta_1 \eta_2 + \zeta_1 \zeta_2$ het kleinste is.

Het probleem is dus teruggebracht tot het volgende: kunnen we indien $\mu_n = \xi_1 \xi_2 + \eta_1 \eta_2 + \zeta_1 \zeta_2$ is horende bij $V_{2n}(x_1, x_2; y_1, y_2; z_1, z_2)$ de $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ zo bepalen, dat de alfabetische volgorde van de V_{2n} correspondeert met een monotone daling in de rij $\mu_1, \dots, \mu_{15}$? Hieronder volgt eerst een lijst van $\mu_1, \dots, \mu_{15}$.

TABEL II

$\mu_1 = \alpha\beta + \gamma\alpha$	
$\mu_2 = \alpha\beta + \gamma\varepsilon$	$\mu_1 - \mu_2 = \gamma(\delta - \varepsilon) > 0$
$\mu_3 = \alpha\beta + \delta\varepsilon$	$\mu_2 - \mu_3 = \varepsilon(\gamma - \delta) > 0$
$\mu_4 = \alpha\gamma + \beta\delta$	$\mu_3 - \mu_4 = \alpha(\beta - \gamma) - \delta(\beta - \varepsilon)$
$\mu_5 = \alpha\gamma + \beta\varepsilon$	$\mu_4 - \mu_5 = \beta(\delta - \varepsilon) > 0$
$\mu_6 = \alpha\gamma + \delta\varepsilon$	$\mu_5 - \mu_6 = \varepsilon(\beta - \delta) > 0$
$\mu_7 = \alpha\delta + \beta\gamma$	$\mu_6 - \mu_7 = \gamma(\alpha - \beta) - \delta(\alpha - \varepsilon)$
$\mu_8 = \alpha\delta + \beta\varepsilon$	$\mu_7 - \mu_8 = \beta(\gamma - \varepsilon) > 0$
$\mu_9 = \alpha\delta + \gamma\varepsilon$	$\mu_8 - \mu_9 = \varepsilon(\beta - \gamma) > 0$
$\mu_{10} = \alpha\varepsilon + \beta\gamma$	$\mu_9 - \mu_{10} = \alpha(\delta - \varepsilon) - \gamma(\beta - \varepsilon)$
$\mu_{11} = \alpha\varepsilon + \beta\delta$	$\mu_{10} - \mu_{11} = \beta(\gamma - \delta) > 0$
$\mu_{12} = \alpha\varepsilon + \gamma\delta$	$\mu_{11} - \mu_{12} = \delta(\beta - \gamma) > 0$
$\mu_{13} = \beta\gamma + \delta\varepsilon$	$\mu_{12} - \mu_{13} = \varepsilon(\alpha - \delta) - \gamma(\beta - \delta)$
$\mu_{14} = \beta\delta + \gamma\varepsilon$	$\mu_{13} - \mu_{14} = (\beta - \varepsilon)(\gamma - \delta) > 0$
$\mu_{15} = \beta\varepsilon + \gamma\delta$	$\mu_{14} - \mu_{15} = (\beta - \gamma)(\delta - \varepsilon) > 0$

Kiezen we $\beta > \gamma > \delta > \varepsilon > 0$ willekeurig en nemen we α groter dan de grootste van $\beta, \frac{\delta(\beta-\varepsilon)}{\beta-\gamma}, \frac{\beta\gamma-\delta\varepsilon}{\gamma-\delta}, \frac{\gamma(\beta-\varepsilon)}{\delta-\varepsilon}, \frac{\gamma(\beta-\delta)+\delta\varepsilon}{\varepsilon}$, dan vormen de μ 's inderdaad een dalende rij. Bij voldoende grote t zijn de 30 viervlakken dan naar opklimmende grootte geordend wanneer ze alfabetisch worden opgeschreven.

Een voorbeeld is $\alpha = 11, \beta = 4, \gamma = 3, \delta = 2, \varepsilon = 1$, met $\mu_1 = 50, \mu_2 = 47, \mu_3 = 46, \mu_4 = 41, \mu_5 = 37, \mu_6 = 35, \mu_7 = 34, \mu_8 = 26, \mu_9 = 25, \mu_{10} = 23, \mu_{11} = 19, \mu_{12} = 17, \mu_{13} = 14, \mu_{14} = 11, \mu_{15} = 10$.

TABEL III

i	$V-2t^3-21t^2$	$V(89)$	i	$V-2t^3-21t^2$	$V(89)$
1	-56t-371	1 570 924	16	-32t-123	1 573 308
2	-56t-364	1 570 931	17	-31t-211	1 573 309
3	-53t-431	1 571 131	18	-31t-139	1 573 381
4	-53t-403	1 571 159	19	-29t- 43	1 573 655
5	-52t-444	1 571 207	20	-29t- 23	1 573 675
6	-52t-423	1 571 228	21	-25t- 99	1 573 955
7	-47t-209	1 571 887	22	-25t- 39	1 574 015
8	-47t-193	1 571 903	23	-23t-107	1 574 125
9	-43t-281	1 572 171	24	-23t- 67	1 574 165
10	-43t-233	1 572 219	25	-20t- 7	1 574 492
11	-41t-301	1 572 329	26	-20t+ 4	1 574 503
12	-41t-269	1 572 361	27	-17t- 43	1 574 723
13	-40t- 76	1 572 643	28	-17t+ 1	1 574 767
14	-40t- 67	1 572 652	29	-16t- 44	1 574 811
15	-32t-204	1 573 227	30	-16t- 11	1 574 844

Alle viervlakken in deze serie bestaan vanaf een waarde van t die tussen 4 en 5 ligt, maar de volgorde is pas alfabetisch voor $t > 88$. Een paar viervlakken zoals V_1 en V_2 , waarvan we bij voorbaat weten welke bij alle $a > b > c > d > e > f > 0$ de grootste is, zullen we vergelijkbaar noemen. Een paar als V_1 en V_3 , waarvoor in tabel I voor $t = 2$ $V_1 > V_3$ maar in tabel III $V_3 > V_1$ zullen we onvergelijkbaar noemen.

We kunnen het voorafgaande resultaat nu ook zo formuleren:

Stelling. Zijn V_i en V_j vergelijkbaar, dan komt in de alfabetische rangschikking de kleinste van de twee voor de grootste.

Vraagstuk 3. Welke paren zijn vergelijkbaar, welke niet?

Anders geformuleerd: De ongelijkheidsrelatie bij vergelijkbare V's maakt de verzameling $(V_1, \dots, V_{30})$ tot een halfgeordend systeem. Hoe ziet dit systeem er uit?

Vraag 3 kunnen we stellen

- a) voor complete zestallen, dat zijn zestallen waarbij de viervlakken alle 30 bestaan.
- b) voor niet noodzakelijk complete zestallen.

Het zal blijken dat voor complete zestallen bij bepaalde paren V_i, V_j steeds $V_i > V_j$, terwijl er een niet compleet zestal bestaat waarbij $V_j > V_i$. Systeem 3a is dus rijker aan relaties dan systeem 3b. Willen we vergelijkbaarheid bewijzen zowel in geval a) als in geval b) dan zullen we die moeten bewijzen voor niet noodzakelijk complete zestallen. Tegenvoorbeelden zullen we daarentegen met complete zestallen moeten geven, willen ze zowel voor geval a) als voor geval b) bruikbaar zijn.

We hebben al gezien dat $V_{2n} > V_{2n-1}$ (15 relaties).

Andere relaties vinden we uit:

$$\begin{aligned} V(x_1, y_2 ; y_1, x_2 ; z_1, z_2) - V(x_1, x_2 ; y_1, y_2 ; z_1, z_2) = \\ = (x_1^2 - y_1^2)(x_2^2 - y_2^2)(x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 - 2z_1^2 - z_2^2). \end{aligned} \quad (1)$$

Nemen we aan dat de voorste de laatste is in de alfabetische volgorde, dus $x_2 > y_2$, dan is het teken van het verschil dat van de factor $x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 - 2z_1^2 - z_2^2$. Hierin is $x_1 = a$, $x_2 = b$ of $y_1 = b$. De enige mogelijkheid dat de factor $x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 - 2z_1^2 - z_2^2 < 0$ is dat $z_1 = c$, $z_2 = d$ of $z_1 = d$, $z_2 = c$; in alle andere gevallen is $2z_1^2 + z_2^2 < 2c^2 + d^2 < a^2 + b^2 + d^2 < x_1^2 + y_1^2 + y_2^2$.

Dit geeft o.a. de relaties: $V_{28} > V_{18}$, $V_{27} > V_{17}$, $V_{26} > V_{12}$, $V_{25} > V_{11}$, $V_{22} > V_{16}$, $V_{21} > V_{15}$, $V_{20} > V_{10}$, $V_{19} > V_9$, $V_{14} > V_8$, $V_{13} > V_7$, $V_{25} > V_6$, $V_{19} > V_4$, $V_{13} > V_2$.

Verwisselen we in (1) de letters y en z, dan vinden we op analoge manier de relaties: $V_6 < V_{21}$, $V_5 < V_{15}$, $V_4 < V_{27}$, $V_3 < V_{17}$.

Een andere vorm van (1) is:

$$\begin{aligned} V(x_1, y_1 ; x_2, y_2 ; z_1, z_2) - V(x_1, x_2 ; y_1, y_2 ; z_1, z_2) = \\ = (x_1^2 - y_2^2)(x_2^2 - y_1^2)(x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2 - z_1^2 - 2z_2^2). \end{aligned} \quad (2)$$

Hieruit krijgen we: $V_{18} > V_4$, $V_{16} > V_6$, $V_{12} > V_6$, $V_{11} > V_5$, $V_{10} > V_4$, $V_9 > V_3$, $V_8 > V_2$, $V_7 > V_1$.

Verwisselen we in (2) weer y en z, dan krijgen we nog: $V_{30} > V_9$, $V_{29} > V_{15}$, $V_{23} > V_{17}$, $V_{18} > V_{12}$, $V_{24} > V_{11}$, $V_{16} > V_{10}$.

Verder kunnen we nog bewijzen:

$$\begin{aligned} V_{15} - V_3 &= (V_{15} - V_5) + (V_5 - V_3) = \\ &= (a^2 - e^2)(b^2 - d^2)(a^2 + b^2 + d^2 + e^2 - c^2 - 2f^2) + (c^2 - d^2)(e^2 - f^2) \cdot \\ &\quad \cdot (c^2 + d^2 + e^2 + f^2 - a^2 - 2b^2) \\ &\quad + (a^2 - e^2)(b^2 - c^2)(a^2 + b^2 + d^2 + e^2 - c^2 - 2f^2) - (c^2 - d^2)(b^2 - c^2)(e^2 - f^2) + \\ &\quad + (a^2 - e^2)(c^2 - d^2)(a^2 + b^2 + d^2 + e^2 - c^2 - 2f^2) - (a^2 - e^2)(c^2 - d^2)(e^2 - f^2) \\ &\quad - (b^2 - d^2)(c^2 - d^2)(e^2 - f^2) > 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_{17} - V_5 &= (V_{17} - V_3) - (V_5 - V_3) = \\ &= (a^2 - f^2)(b^2 - d^2)(a^2 + b^2 + d^2 + f^2 - 2c^2 - e^2) + (c^2 - d^2)(e^2 - f^2) \cdot \\ &\quad \cdot (a^2 + 2b^2 - c^2 - d^2 - e^2 - f^2) \\ &> f^2 \{ (a^2 - f^2)(b^2 - d^2) - (e^2 - f^2)(c^2 - d^2) \} > 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_{29} - V_{15} &= (a^2 - c^2)(e^2 - f^2)(a^2 + c^2 + d^2 + f^2 - b^2 - 2e^2) > (a^2 - b^2)(d^2 - f^2)(c^2 - e^2) = \\ \underline{V_{29} - V_{17}} &= (V_{29} - V_{23}) + (V_{23} - V_{17}) = \underline{= V_4 - V_3, \text{ zodat } V_{29} > V_{15} + V_4 - V_3 > V_4.} \\ &= (a^2 - b^2)(e^2 - f^2)(a^2 + b^2 + e^2 + f^2 - c^2 - 2d^2) + (a^2 - c^2)(d^2 - e^2) \cdot \\ &\quad \cdot (a^2 + c^2 + d^2 + e^2 - b^2 - 2f^2) \\ &= (a^2 - b^2)(e^2 - f^2)(a^2 + b^2 + f^2 - c^2 - d^2) - (a^2 - b^2)(d^2 - e^2)(e^2 - f^2) + \\ &\quad + (a^2 - c^2)(d^2 - e^2)(a^2 + c^2 + d^2 + e^2 - b^2 - 2f^2) > 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_{30} - V_{11} &= (V_{30} - V_{25}) + (V_{25} - V_{11}) = (b^2 - d^2)(c^2 - e^2)(b^2 + c^2 + d^2 + e^2 - a^2 - 2f^2) \\ &\quad + (a^2 - b^2)(c^2 - f^2)(a^2 + b^2 + c^2 + f^2 - d^2 - 2e^2) > 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_{27} - V_5 > V_{27} - V_{17} &= (a^2 - b^2)(d^2 - f^2)(a^2 + b^2 + d^2 + f^2 - c^2 - 2e^2) > (a^2 - b^2)(d^2 - e^2) \cdot \\ &\quad \cdot (c^2 - f^2) = V_6 - V_5, \text{ zodat } V_{27} > V_6. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_{23} - V_6 &> (V_{23} - V_{17}) - (V_6 - V_5) = (a^2 - c^2)(d^2 - e^2)(a^2 - b^2 + d^2 + e^2 - f^2 + c^2 - f^2) - \\ &\quad - (a^2 - b^2)(d^2 - e^2)(c^2 - f^2) > 0 \end{aligned}$$

$$\underline{V_{29} - V_{15}} > (a^2 - b^2)(d^2 - e^2) \{ (c^2 - d^2) + (d^2 - f^2) \} = V_6 - V_5, \text{ zodat } V_{29} > V_6.$$

$$\begin{aligned} V_{23}-V_4 &= (V_{23}-V_{17}) + (V_{17}-V_3) - (V_4-V_3) = \\ &= (a^2-c^2)(d^2-e^2)(a^2-b^2+c^2+d^2+e^2-2f^2) + (a^2-f^2)(b^2-d^2) \cdot \\ &\quad \cdot (a^2+b^2-2c^2+d^2-e^2+f^2) \\ &\quad - (a^2-b^2)(d^2-e^2)(d^2-f^2) - (a^2-b^2)(c^2-d^2)(d^2-f^2) > 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_{21}-V_4 &= (V_{27}-V_4) - (V_{27}-V_{21}) > (a^2-c^2)(e^2-f^2)(a^2+b^2+d^2+f^2-2c^2-e^2) \\ &+ (c^2-d^2)(e^2-f^2)(a^2+b^2+d^2+f^2-2c^2-e^2) - (a^2-c^2)(e^2-f^2) \cdot \\ &\quad \cdot (a^2+c^2+e^2+f^2-b^2-2d^2) \\ &> (a^2-c^2)(e^2-f^2)(2b^2-3c^2+3d^2-2e^2) + (c^2-d^2)(e^2-f^2)(a^2-c^2) > 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_{28}-V_9 &= (V_{28}-V_7) + (V_7-V_9) = \\ &= (c^2-f^2)(a^2-e^2)(a^2+c^2+e^2+f^2-2d^2-b^2) + (b^2-f^2)(d^2-e^2) \cdot \\ &\quad \cdot (2a^2+c^2-b^2-d^2-e^2-f^2) \\ &> f^2(a^2-e^2)(c^2-f^2) - (a^2-e^2)(d^2-e^2)(c^2-f^2) + (a^2-e^2)(d^2-e^2)(b^2-f^2) - \\ &\quad - f^2(b^2-f^2)(d^2-e^2) > 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_{28}-V_{15} &= (V_{28}-V_{27}) + (V_{27}-V_{29}) + (V_{29}-V_{15}) = \\ &= (a^2-f^2)(b^2-d^2)(c^2-e^2) - (b^2-c^2)(d^2-e^2)(b^2+c^2+d^2+e^2-a^2-2f^2) \\ &\quad + (a^2-c^2)(d^2-f^2)(a^2-b^2+c^2+d^2-2e^2+f^2) > \\ &> (e^2-f^2)(b^2-c^2)(c^2-e^2) + (a^2-c^2)(e^2-f^2)(a^2-b^2+c^2+d^2-2e^2+f^2) \\ &\quad + (b^2-c^2)(d^2-e^2)(2a^2-2b^2-3e^2+3f^2) \\ &> (e^2-f^2)(b^2-c^2) \{ (c^2-e^2) + (a^2-b^2+c^2+d^2-2e^2+f^2) - 3(d^2-e^2) \} > 0. \end{aligned}$$

Deze resultaten zijn samengevat in tabel IV, waar de vergelijkbaarheid van V_i en V_j is aangegeven met een zwart hokje of een kruisje op de plaats (i,j) . Een kruisje op (i,k) geeft aan dat V_i en V_k vergelijkbaar zijn terwijl er zelfs een V_j bestaat zodat $V_i > V_j > V_k$.

Hiermee is tevens probleem IIIb opgelost. Van alle overige combinaties (i,j) is nl. een tegenvoorbeeld te geven waaruit de niet vergelijkbaarheid blijkt. De getallen in de betrokken vakjes (voorzover $\neq 0$) verwijzen naar de kolom in tabel V waar dat tegenvoorbeeld te vinden is.

Alleen de getallen 0 behoeven nog nadere toelichting. Deze zijn

verkregen uit het ordeningsschema van de bij vraagstuk II te pas gebrachte grootheden μ_1 (zie tabel II). Hier waren bv. μ_3 en μ_4 onvergelykbaar: $\mu_3 > \mu_4$ voor $\varepsilon=1, \delta=2, \gamma=3, \beta=4, \alpha=7$; $\mu_4 > \mu_3$ voor $\varepsilon=1, \delta=2, \gamma=3, \beta=4, \alpha=5$. Daar voor grote waarden van t $V_{2k} > V_{2k-1} > V_{2m} > V_{2m-1}$ indien $\mu_m > \mu_k$ impliceert de onvergelykbaarheid van μ_m en μ_k die van het paar V_{2k}, V_{2k-1} met het paar V_{2m}, V_{2m-1} .

Als aanvulling op tabel II geven we hier:

TABEL IIa

$\mu_1 - \mu_4 = (\alpha - \delta)(\beta - \gamma) > 0$	$\mu_{11} - \mu_{14} = \varepsilon(\alpha - \gamma) > 0$
$\mu_2 - \mu_5 = (\alpha - \varepsilon)(\beta - \gamma) > 0$	$\mu_{12} - \mu_{15} = \varepsilon(\alpha - \beta) > 0$
$\mu_3 - \mu_6 = \alpha(\beta - \gamma) > 0$	$\mu_5 - \mu_{10} = (\alpha - \beta)(\gamma - \varepsilon) > 0$
$\mu_4 - \mu_7 = (\alpha - \beta)(\gamma - \delta) > 0$	$\mu_3 - \mu_8 = (\alpha - \varepsilon)(\beta - \delta) > 0$
$\mu_5 - \mu_8 = \alpha(\gamma - \delta) > 0$	$\mu_6 - \mu_{13} = \gamma(\alpha - \beta) > 0$
$\mu_6 - \mu_9 = (\alpha - \varepsilon)(\gamma - \delta) > 0$	$\mu_9 - \mu_{14} = \delta(\alpha - \beta) > 0$
$\mu_7 - \mu_{10} = \alpha(\gamma - \varepsilon) > 0$	
$\mu_8 - \mu_{11} = (\alpha - \beta)(\delta - \varepsilon) > 0$	
$\mu_9 - \mu_{12} = (\alpha - \gamma)(\delta - \varepsilon) > 0$	
$\mu_{10} - \mu_{13} = \varepsilon(\alpha - \delta) > 0$	

TABEL IIb

$\mu_2 - \mu_4 = \beta(\alpha - \delta) - \gamma(\alpha - \varepsilon)$	$\mu_6 - \mu_{10} = \gamma(\alpha - \beta) - \varepsilon(\alpha - \delta)$
$\mu_2 - \mu_7 = \alpha(\beta - \delta) - \gamma(\beta - \varepsilon)$	$\mu_6 - \mu_{11} = \alpha(\gamma - \varepsilon) - \delta(\beta - \varepsilon)$
$\mu_3 - \mu_5 = \alpha(\beta - \gamma) - \varepsilon(\beta - \delta)$	$\mu_8 - \mu_{10} = \alpha(\delta - \varepsilon) - \beta(\gamma - \varepsilon)$
$\mu_3 - \mu_7 = \beta(\alpha - \gamma) - \delta(\alpha - \varepsilon)$	$\mu_8 - \mu_{13} = \delta(\alpha - \varepsilon) - \beta(\gamma - \varepsilon)$
$\mu_5 - \mu_{10} = \beta(\alpha - \gamma) - \varepsilon(\alpha - \delta)$	$\mu_9 - \mu_{11} = \delta(\alpha - \beta) - \varepsilon(\alpha - \gamma)$
$\mu_5 - \mu_7 = \alpha(\gamma - \delta) - \beta(\gamma - \varepsilon)$	$\mu_9 - \mu_{13} = \delta(\alpha - \varepsilon) - \gamma(\beta - \varepsilon)$
$\mu_6 - \mu_8 = \alpha(\gamma - \delta) - \varepsilon(\beta - \delta)$	$\mu_{11} - \mu_{13} = \varepsilon(\alpha - \delta) - \beta(\gamma - \delta)$
$\mu_{12} - \mu_{14} = \varepsilon(\alpha - \gamma) - \delta(\beta - \gamma)$	

Fig.1 geeft het ordeningsrooster van de μ_i , fig.2 geeft het ordeningsschema van de complete en incomplete ribben-zestallen.

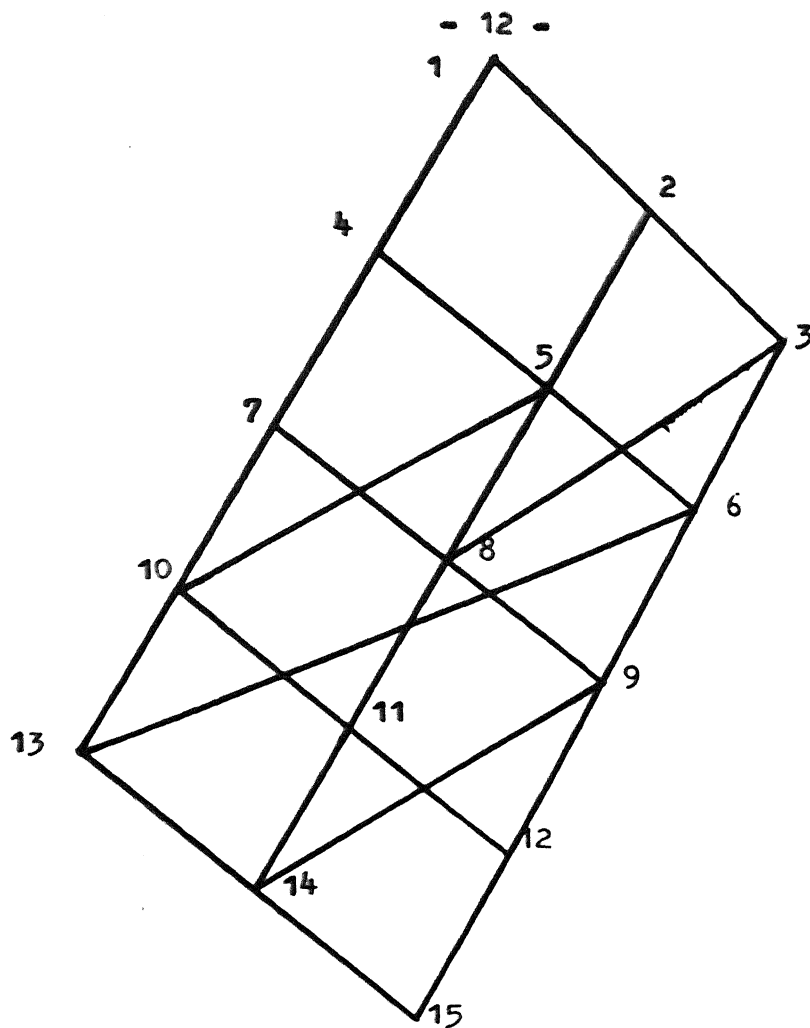


fig.1.

Oplossing van vraagstuk IIIa :

In tabel V kolom 10 en 11 zijn incomplete zestallen gebruikt ; in tabel IV wordt hiernaar op 11 plaatsen verwezen, nl. daar waar V_9 met V_{29} ; V_{11} met V_{17} ; V_{23} , V_{27} en V_{29} ; V_{12} met V_{23} , V_{24} , V_{29} en V_{30} ; V_{18} met V_{24} en V_{30} worden vergeleken. We zullen bewijzen dat in al deze gevallen bij complete zestallen tot vergelijkbaarheid kan worden besloten. Hiermee is dan ook probleem IIIa opgelost. Het bijbehorende ordeningsschema wordt gegeven in fig.3.

Bewijs :

$$V_9 = a^2 b^2 (c^2 + d^2 + e^2 + f^2 - a^2 - b^2) - (b^2 - c^2)(c^2 - d^2)(e^2 - f^2) - (a^2 - f^2)(c^2 - d^2)(e^2 - f^2) - e^4(c^2 - d^2)^2 - d^2(e^2 - f^2)^2 - a^2(c^2 - f^2)(d^2 - e^2).$$

Wil V_9 positief zijn, dan is dus op zijn minst nodig dat $c^2 + d^2 + e^2 + f^2 > a^2 + b^2$.

Nu is

$$V_{11} - V_{17} = (c^2 - d^2)(a^2 - e^2)(2b^2 + f^2 - a^2 - c^2 - d^2 - e^2)$$

$$V_{12} - V_{23} = (c^2 - e^2)(a^2 - d^2)(2b^2 + f^2 - a^2 - c^2 - d^2 - e^2)$$

$$V_{13} - V_{24} = (d^2 - e^2)(a^2 - c^2)(2b^2 + f^2 - a^2 - c^2 - d^2 - e^2).$$

Is nu $2b^2 + f^2 - a^2 - c^2 - d^2 - e^2 > 0$ dan is $2b^2 + f^2 > a^2 + c^2 + d^2 + e^2$,
dus $b^2 > c^2 + d^2$, dus $a^2 > e^2 + f^2$, dus $a^2 + b^2 > c^2 + d^2 + e^2 + f^2$.

Bij volledige zestallen is dus $V_{17} > V_{11}$, $V_{24} > V_{23} > V_{12} > V_{11} > V_{24} > V_{18}$.

Verder is $V_{12} - V_{29} = V_{12} - V_{26} + V_{26} - V_{29} =$

$$\begin{aligned} &= -(a^2 - b^2)(c^2 - f^2)(a^2 + b^2 + c^2 + f^2 - 2d^2 - e^2) + (b^2 - d^2)(c^2 - e^2)(2a^2 + f^2 - b^2 - c^2 - d^2 - e^2) \\ &= (b^2 - d^2)(c^2 - e^2)(b^2 + f^2 - c^2 - d^2 - e^2) - (a^2 - b^2)\{2(b^2 - d^2)(e^2 - f^2) + \\ &\quad + (c^2 - f^2)(a^2 - b^2 + c^2 - e^2 + f^2)\}. \end{aligned}$$

Indien $V_{12} > V_{29}$, dan is $b^2 + f^2 > c^2 + d^2 + e^2$, dus $b^2 > c^2 + d^2$, dus $V_5 < 0$.

Voor volledige zestallen is dus $V_{30} > V_{29} > V_{12} > V_{11}$.

Evenzo: $V_{11} - V_{27} = V_{11} - V_{25} + V_{25} - V_{27} =$

$$\begin{aligned} &= (a^2 - b^2)(c^2 + f^2)(d^2 + 2e^2 - a^2 - b^2 - c^2 - f^2) + (b^2 - e^2)(c^2 - d^2)(2a^2 + f^2 - b^2 - c^2 - d^2 - e^2) \\ &= (b^2 - e^2)(c^2 - d^2)(b^2 + f^2 - c^2 - d^2 - e^2) - (a^2 - b^2)\{(d^2 - f^2)(a^2 + b^2 + c^2 - d^2 - 2e^2 + f^2) + \\ &\quad + (c^2 - d^2)(a^2 - b^2 + c^2 - d^2 + f^2)\} \end{aligned}$$

en $V_{11} - V_{27} > 0 \Rightarrow b^2 + f^2 > c^2 + d^2 + e^2 \Rightarrow V_5 < 0$.

Ook $V_{18} - V_{30} = V_{18} - V_{28} + V_{28} - V_{30} =$

$$\begin{aligned} &= (a^2 - b^2)(d^2 - f^2)(2c^2 + e^2 - a^2 - b^2 - d^2 - f^2) + (b^2 - c^2)(d^2 - e^2)(2a^2 + f^2 - b^2 - c^2 - d^2 - e^2) \\ &= (b^2 - c^2)(d^2 - e^2)(b^2 + f^2 - c^2 - d^2 - e^2) - (a^2 - b^2)\{(d^2 - f^2)(a^2 - b^2 + d^2 - e^2 + f^2) + \\ &\quad + 2(b^2 - c^2)(e^2 - f^2)\} \end{aligned}$$

zodat voor volledige zestallen ook $V_{30} > V_{18}$.

$$\begin{aligned} V_9 - V_{29} &= V_9 - V_{10} + V_{10} - V_{29} = -(a^2 - c^2)(b^2 - e^2)(d^2 - f^2) + \\ &+ (a^2 - d^2)(c^2 - f^2)(2b^2 + e^2 - a^2 - c^2 - d^2 - f^2) = (b^2 - d^2)(c^2 - d^2)(b^2 - c^2 - d^2 + e^2 - f^2) \frac{c^2 - f^2}{c^2 - d^2} \\ &- (a^2 - b^2)(d^2 - f^2)(a^2 - d^2 - f^2) - (a^2 - b^2)(c^2 - d^2)(a^2 - b^2 + c^2 - d^2 + e^2) \\ &- (d^2 - e^2)(d^2 - f^2)(2a^2 - c^2 - d^2). \end{aligned}$$

$$\text{Dus } V_9 > V_{29} \Rightarrow b^2 + e^2 > c^2 + d^2 + \lambda f^2, \quad \lambda = \frac{c^2 - f^2}{c^2 - d^2} > 1. \quad (1)$$

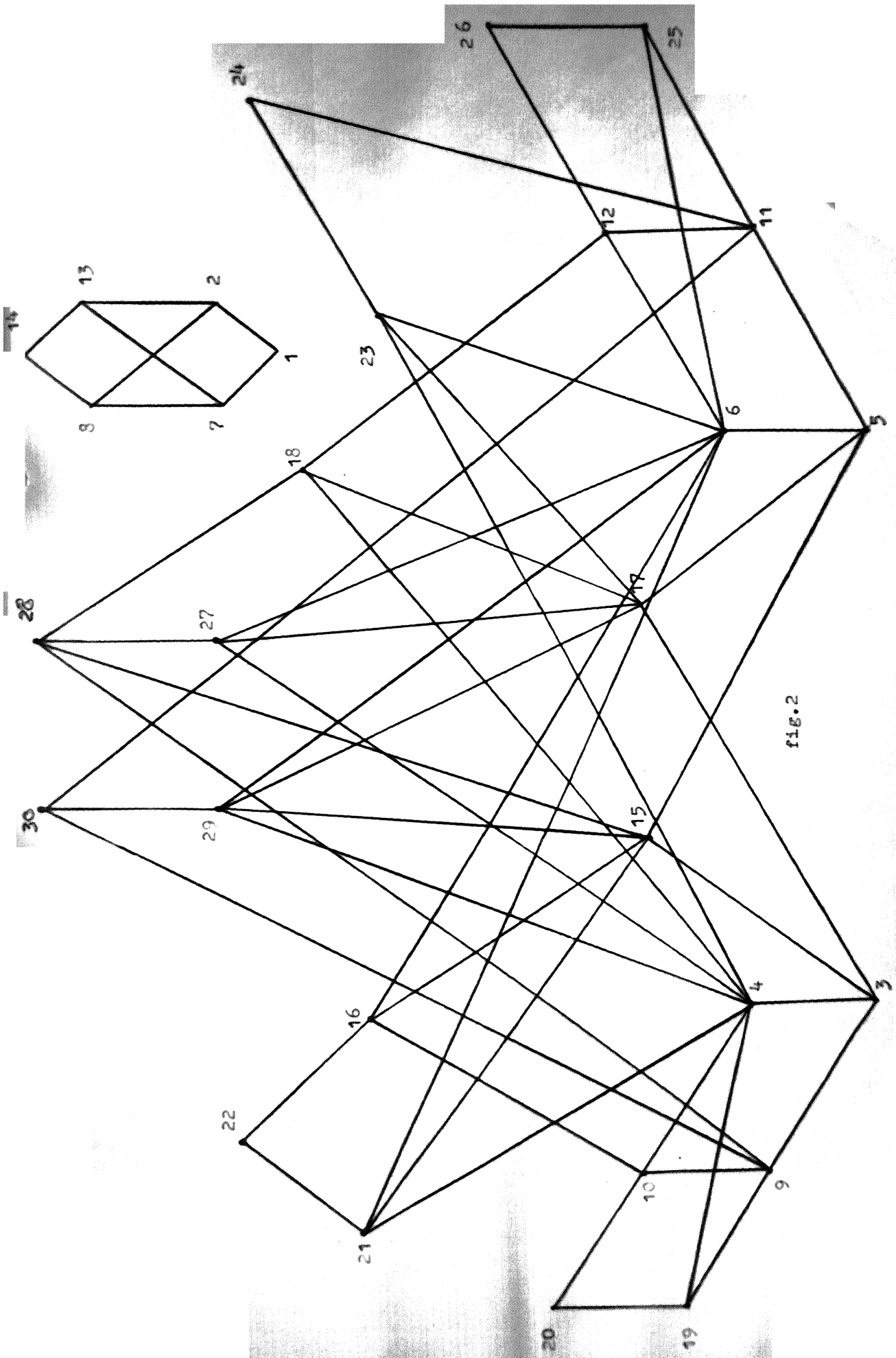
In dat geval is

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
30	1	1					1	1		2		11	1	1		2		11	1	1	1	1	1	1	5	5	5	5		30
29	1	1					1	1	10	2	10	10	1	1		2		4	1	1	1	1	1	1	5	5	5	3	29	
28	1	1					1	1		2			1	1		2			1	1	1	1	0	0	6	6			28	
27	1	1					1	1	9	2	10	9	1	1		9	2		4	1	1	1	1	0	0	6	5		27	
26	1	1	8	8			1	1	8	2			1	1		0	0	0	0	1	1	0	0	0	0			26		
25	1	1	8	8			1	1	8	2			9	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0			25		
24	1	1					1	1	7	2			11	1	1	7	2		11	5	2	5	2				24			
23	1	1					1	1	7	2	10	10	1	1		7	2		3	5	2	5	2				23			
22	1	1					1	1			0	0	1	1				0	0	6	6						22			
21	1	1					1	1	4	2	0	0	1	1			3	0	0	4	2						21			
20	1	1			0	0	1	1			0	0	1	1		0	0	0	0								20			
19	1	1			0	0	1	1		2	0	0	1	1		0	0	0	0	19										
18	1	1					1	1	7	2			1	1		7	2			18										
17	1	1					1	1	7	1	10	1	1	1		7	1			17										
16	1	1					1	1			0	0	1	1						16										
15	1	1					1	1	1	4	1	0	0	1	1					15										
14			0	0	0	0			0	0	0	0								14										
13			0	0	0	0		2	0	0	0	0								13										
12	1	1	3	3			1	1	3	2										12										
11	1	1	3	1			1	1	3	1										11										
10	1	1			0	0	1	1			10																			
9	1	1			1	0	0	1	1	9																				
8			0	0	0	0																								
7			0	0	0	0																								
6	1	1	3	3																										
5	1	1	3	1																										
4	1	1																												
3	1	1																												
2																														
1	1	1																												

TABEL IV

Table 1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
a^1, b^1	20,19	20,20	5,4	20,20	24,10	29,11	15,8	10,10	7,7	6,6	11,11
a^2, b^2	19,19	12,12	4,3	12,11	9,9	11,10	7,7	10,8	6,6	3,2	5,5
a^3, b^3	9,8	12,7	3,2	11,7	8,8	10,10	7,6	8,3	3,2	2,2	3,3
1	4301	900	52	205	627	309	473	608	105	-110	-702
2	4301	900	53	205	627	309	473	608	105	-110	-702
3	3861	900	52	205	609	309	473	608	57	-110	-770
4	3971	900	53	205	620	309	473	608	57	-110	-770
5	3861	900	51	129	609	309	473	598	57	-110	-770
6	3971	900	51	129	620	309	473	598	57	-110	-770
7	4301	3012	52	2653	927	309	609	608	123	22	126
8	4301	3332	53	2941	927	309	617	608	124	22	126
9	3861	3012	52	2653	895	309	609	608	93	22	46
10	3971	3332	53	2941	919	309	617	608	109	22	142
11	3801	3292	51	2833	895	309	608	598	92	22	46
12	3971	3292	51	2833	919	309	608	598	107	22	142
13	4301	3012	61	2653	927	867	609	608	123	22	126
14	4301	3332	61	2941	927	867	617	608	124	22	126
15	3861	3012	61	2640	895	841	609	650	93	18	46
16	3971	3332	65	3045	919	860	617	678	109	34	142
17	3861	3292	61	2896	895	841	608	650	92	18	46
18	3971	3292	65	3013	919	860	608	678	107	34	142
19	4181	3012	61	2653	1148	867	609	608	93	22	46
20	4181	3332	61	2941	1161	867	617	608	109	22	142
21	4181	3012	61	2640	1148	841	609	650	93	18	46
22	4181	3332	65	3045	1161	860	617	678	109	34	142
23	4181	3292	61	2896	1147	841	608	650	125	18	130
24	4181	3292	65	3013	1147	860	608	678	125	34	130
25	4180	3292	63	2833	1148	867	713	598	92	22	46
26	4180	3292	63	2833	1161	867	713	598	107	22	142
27	4180	3292	65	2896	1148	841	713	650	92	18	46
28	4180	3292	68	3013	1161	860	713	678	107	34	142
29	4180	3292	65	2896	1147	841	713	650	125	18	130
30	4180	3292	68	3013	1147	860	713	678	125	34	130

fig. 2



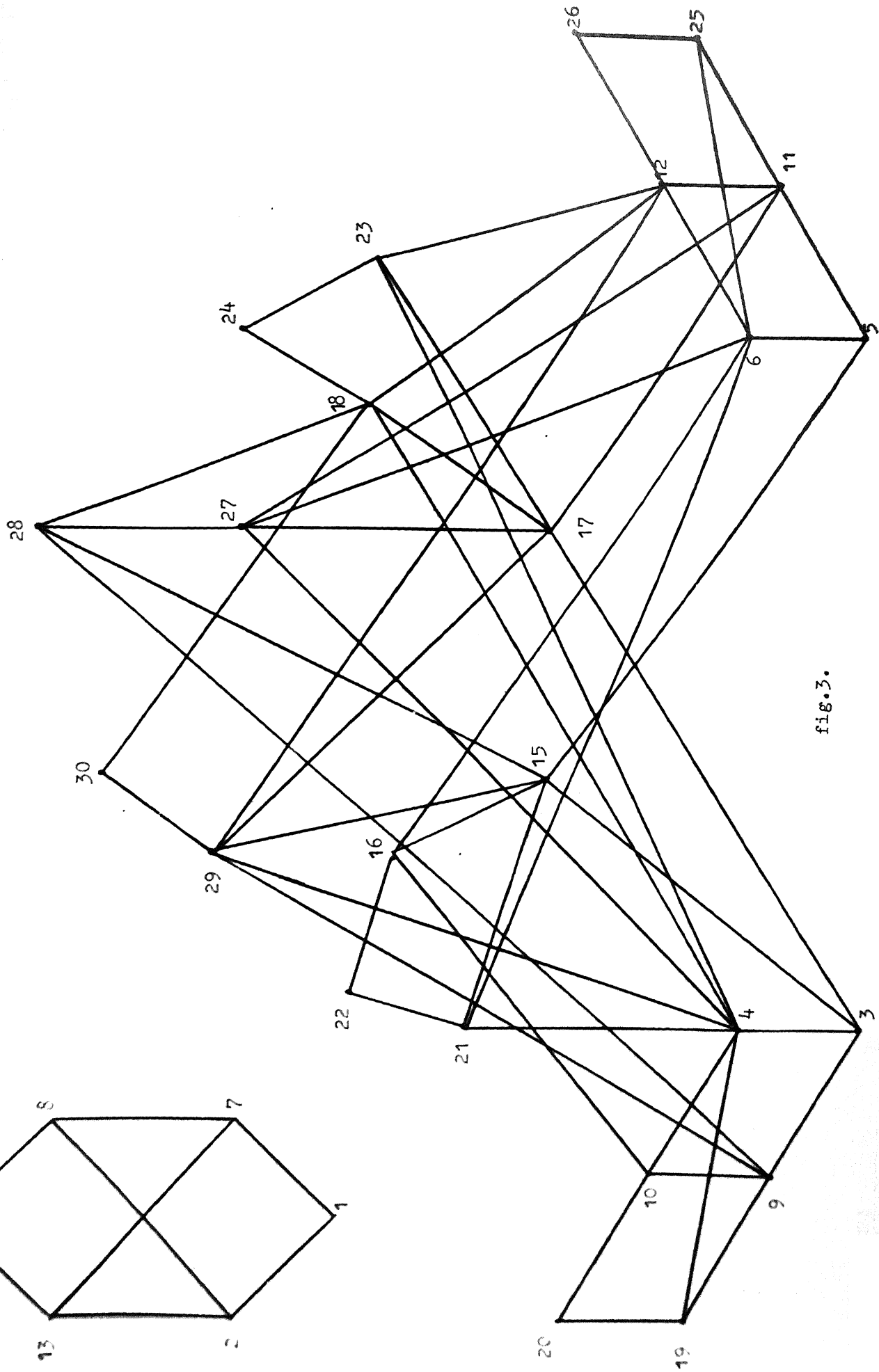
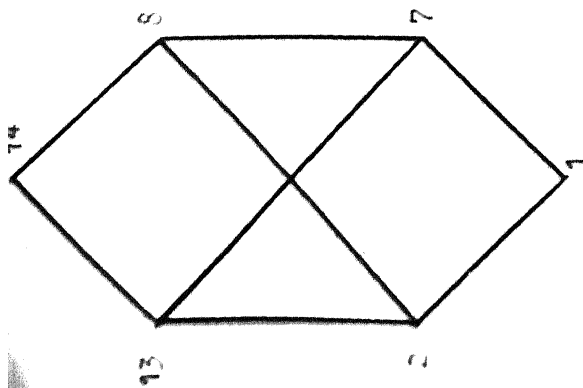


fig. 3.